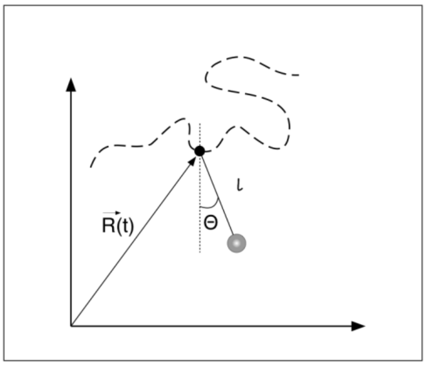
Mecânica Geral – Aula de Exercícios (22/06)

1) Considere um pêndulo cujo suporte se move de acordo com uma trajetória dada

$$\vec{R}(t) = X(t)\,\hat{\imath} + Y(t)\,\hat{\jmath}$$

Encontre a Lagrangiana que descreve esse pêndulo, e a equação de movimento. Note que $X(t)$ e $Y(t)$ são funções **dadas**, e não graus de liberdade dinâmicos (ou seja, não correspondem a coordenadas generalizadas). Para verificar se sua solução está correta, teste os seguintes casos particulares que você já viu anteriormente no curso:



(i) Pêndulo em um referencial inercial ($\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}_0\,t$)

(ii) Pêndulo no carro acelerado – Aula sobre referenciais não inerciais ($\ddot{X} = Const.$; $Y = 0$)

(iii) Pêndulo no elevador – Ex. 7.22, Lista 7 ($\ddot{Y} = Const.$; $X = 0$)

(iv) Pêndulo com suporte se movendo em círculos - Ex. 7.29, Lista 8 ($X = R_0 \cos\omega t$; $Y = R_0 \sin\omega t$)

(v) Suporte com movimento horizontal periódico ($X = X_0 \cos\Omega t$; $Y = 0$)
Obs: Esse caso, mais complicado, se reduz a um oscilador harmônico forçado, no limite de pequenas oscilações. Em particular, deve surgir o fenômeno de ressonância.

2) Considere uma partícula de massa m presa a um arame de formato parabólico que gira ao redor de seu eixo com velocidade angular constante ω (veja a figura). Usando coordenadas cilíndricas, e tomando a equação da parábola como $z = k\,\rho^2$, escreva a lagrangeana em termos da coordenadas generalizada ρ. Encontre a equação de movimento, e discuta eventuais pontos de equilíbrio.

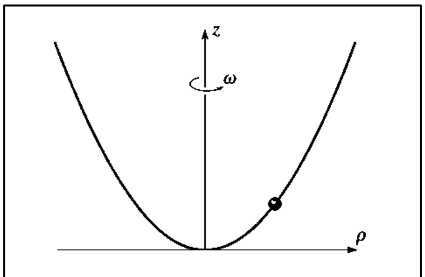


Figure 7.17 Problem 7.41

3) No ex. 4.41, foi demonstrado o teorema do virial para partículas em órbitas circulares sob a ação do potencial $U = kr^n$. Essa é uma versão mais geral desse resultado, para qualquer órbita **periódica**:

a) Mostre que, se $G = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}$, então

$$\frac{G(t) - G(0)}{t} = 2\langle T \rangle + \langle \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} \rangle,$$

onde $\boldsymbol{F}$ é a força resultante sobre a partícula e $\langle f \rangle$ é a média no tempo de uma função $f(t)$.

b) Mostre que, no caso de órbitas **periódicas**, o lado esquerdo da equação se torna arbitrariamente pequeno se $t \to \infty$.

c) Por fim, mostre que, se a força $\boldsymbol{F}$ vem de um potencial do tipo $U = kr^n$, então

$$\langle T \rangle = \frac{n\langle U \rangle}{2},$$

onde as médias são tomadas em intervalos de tempo muito longos.

4) Considere duas partículas sujeitas a uma força de inverso do quadrado da distância que seja repulsiva (por exemplo, duas cargas de mesmo sinal). Como é o potencial efetivo para esse caso? Mostre que, ao contrário do caso atrativo, esse sistema não possui trajetórias com $E \leq 0$ (isto é, círculos, elipses ou parábolas) e que, em todos os casos em que $E > 0$, as trajetórias são hipérboles. Porque esse resultado era esperado?
Dica: As contas são análogas às feitas em sala para as órbitas de Kepler.